# 123. 函數方程式 $f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt$ ニツイテ

泉　信一（東北大）

南雲氏ガ函數方程式

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ満足スル函數 $f(x)$ ニツイテ研究サレタ[(1)]、コヽニハ次ノ定理ヲ証明スル。

**定理**　モシ $f(x)\in L^2(-\infty,+\infty)$ 及ビ $f(x)$ ガ (1) ヲ満足スルナラバ、$f(x)$ ハ恒等的ニ零デアル。

証明　(1) カラ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(x)e^{-uxi}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}e^{-uxi}\,dx\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-(A-1)}^{A-1}f(t)\,dt\int_{t-1}^{t+1}e^{-uxi}\,dx+\int_{-A-1}^{-A+1}f(t)\,dt\int_{-A}^{t-1}e^{-uxi}\,dx\right.$$

$$\left.+\int_{A-1}^{A+1}f(t)\,dt\int_{t-1}^{A}e^{-uxi}\,dx\right]$$

---

(1) 南雲，三野，角谷，本紙上談話会，第二十一号；南雲，角谷，同紙第二十二号。

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}\, ui}\left[\int_{-(A-1)}^{A-1} f(t)\, e^{-uti}\left(e^{-ui} - e^{ui}\right) dt\right.$$

$$\left. + \int_{-A-1}^{-A+1} f(t)\left(e^{-u(t-1)i} - e^{uAi}\right) dt + \int_{A-1}^{A+1} f(t)\left(e^{-Aui} - e^{-u(t-1)i}\right) dt\right]$$

然ルニ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{u}\int_{-A-1}^{-A+1} f(t)\left(e^{-u(t-1)i} - e^{uAi}\right) dt\right|^2 du \leqq K\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}\left(\int_{-A-1}^{-A+1}|f(t)|\,dt\right)^2$$

$$\leqq 2K\int_{-A-1}^{-A+1}|f(t)|^2 dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}.$$

コヽニ $K$ ハ定數デアル．故ニ

$$\underset{A\to\infty}{l.m.}\ \frac{1}{u}\int_{-A-1}^{-A+1} f(t)\left(e^{-u(t-1)i} - e^{uAi}\right) dt = 0$$

同様ニ

$$\underset{A\to\infty}{l.m.}\ \frac{1}{u}\int_{A-1}^{A+1} f(t)\left(e^{-Aui} - e^{-u(t-1)i}\right) dt = 0$$

從ッテ $f(x)$ ノ "Fourier transform" ヲ $F(u)$ トスルトキ．殆ンドスベテノ $u$ ニ對シテ

$$F(u) = \frac{e^{-ui} - e^{ui}}{-2ui}\, F(u) = \cos u \cdot F(u)$$

故ニ殆ンドスベテノ $u$ ニ對シテ、$F(u) = 0$，從ッテ $f(x) = 0$．然ルニ $f(x)$ ガ (1) ヲ満足スルトキ、連續デアルカラ、$f(x)$ ハ恒等的ニ零デアル。

注意． 上ノ定理ニ於テ $L^2$ ノ代リニ $L^p\ (2 \geqq p > 1)$ デオキカ

ヘルコトガ出來ル、ソノトキニハ *Plancherel* ノ定理ノ代リニ *Titchmarsh* ノ定理ヲ用ヒレバヨイ。